

文章编号: 1000-7598-(2006) 增-0211-06

砂井地基等效平面问题研究

唐晓武, 程冠初, 米君楠

(浙江大学 岩土工程研究所, 杭州 310027)

摘 要: 建立并解析了考虑井阻效应、径竖向组合渗流以及土体水平位移的砂墙平面固结等应变模型。以综合考虑各种因素的 Tang Xiao-wu 均质砂井地基固结理论为前提, 根据砂井地基任意深度处平均超静孔压不变的条件, 给出了砂井单元向砂墙单元转换的等效公式, 使得复杂的砂井空间问题转化为简单的平面问题。采用此种方法, 只需调整地基渗透系数, 极大地减少了有限元网格中的砂井单元数, 降低了计算规模。通过算例, 比较了平面应变模型与 PDSS (平面应变-空间渗流) 情况下的数值解, 验证了等效变换公式的有效性和可靠性。

关 键 词: 砂井; 固结; 平面应变; 空间渗流; 有限元

中图分类号: TU 443 **文献标识码:** A

Study of equivalent plane problem of sand-drained ground

TANG Xiao-wu, CHENG Guan-chu, MI Jun-nan

(Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: Under the Barron's equal strain condition, the plane model of sand-wall ground consolidation considering the effect of well resistance, combined radial and vertical flow and lateral displacement of soil is established. Based on the theory of homogeneous sand-drained ground consolidation by Tang Xiao-wu, under the condition of the consistency of average excess pore pressure at any depth, the equivalent transpositional formula of plane model of sand-wall ground is presented. Thereby, the complicated spatial problem is simplified as the plane problem. This method can reduce the amount of sand-wall elements, with only adjusting the coefficient of permeability. The effectiveness and reliability of this equivalent transpositional formula are validated by comparing the numerical solutions of FEM in case of plane strain and PDSS (plane deformation and spatial seepage).

Key words: sand drain; consolidation; plane strain; spatial seepage flow; FEM

1 引 言

砂井地基固结是一个变形场、渗流场耦合的三维固结问题, 在作有限元计算时, 应当采用三维有限元。然而三维有限元分析本身的工作量是巨大的, 再加上密集的砂井, 更会使得计算变得繁杂。为解决这个矛盾, 必须将砂井等效变换为连续的砂墙, 把轴对称空间问题转化为平面问题, 在一定的精度要求下, 达到了简化问题属性的目的。C.C.Hird^[1], B.Indrarata^[2] 和赵维炳^[3]、陈小丹^[4]等都推导了各自的等效变换公式。Hird 和 Indrarata 均是从不够严密的 Hansbo 理论出发求得的, 并且其等效变换公式是建立在仅考虑径向渗流的基础上的; 赵维炳、陈

小丹考虑了井阻和涂抹效应, 径竖向组合渗流, 但是关于涂抹区不可压缩的假设与实际是不符合的。

笔者认为, 等效的原则是要保证砂井单元和砂墙单元的平均固结度或者任意深度处的平均超静孔压在任一时刻相等。因此, 等效前的砂井地基固结理论必须考虑到井阻、涂抹以及径竖向组合渗流等各种因素。而作为等效后的砂墙地基, 可以假定砂墙不存在涂抹区, 以方便等效后的砂墙地基平面应变有限元计算分析。因此, 本文建立并解析了考虑井阻效应、径竖向组合渗流以及土体水平位移的砂墙平面固结等应变模型; 从综合考虑各种因素的 Tang Xiao-wu 均质砂井地基固结理论^[5]出发, 根据砂井地基任意深度处平均超静孔压不变的条件, 给

出了砂井单元向砂墙单元转换的等效公式,使得复杂的砂井空间问题转化为简单的平面问题,近而降低了计算规模;并且通过平面应变模型与 PDSS^[5]

(平面应变-空间渗流)模型数值解的对比,验证了本文的等效变换公式的有效性和可靠性。

2 砂墙地基固结等应变解析解

取一砂墙单元(砂井及其影响区)进行分析,如图 1 所示。透水边界条件为 PTIB,砂墙有效厚度为 $2b$,有效影响距离为 $2B$,下标 p 表示平面应变状态。

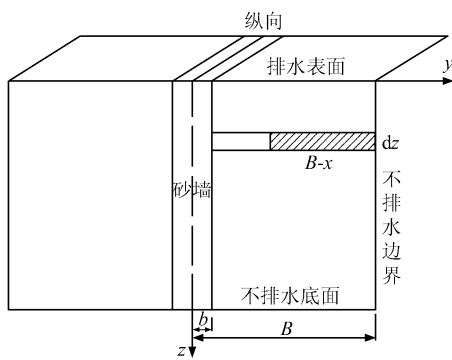


图 1 砂墙地基固结模型

Fig.1 The consolidation model of the drain well

考察单元体 $(B-x) \times 1 \times dz$, 在 dt 时间内发生竖向和水平向的渗流变化量和单元体积变化量:

$$\Delta Q = \frac{k_{xp}}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial x} dz dt - \frac{k_{zp}}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \bar{u}_{zp}}{\partial z^2} (B-x) dz dt \quad (1)$$

$$\Delta V = \varepsilon_v V = (\varepsilon_x + \varepsilon_z)(B-x) dz \times 1 = -\frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \frac{\partial \bar{u}_{zp}}{\partial t} (B-x) dz dt \quad (2)$$

依据渗流连续条件 $\Delta Q = \Delta V$, 写出砂墙地基固结方程并且整理, 得:

$$-C_x \frac{1}{B-x} \frac{\partial u}{\partial x} + C_z \frac{\partial^2 \bar{u}_{zp}}{\partial z^2} = \frac{\partial \bar{u}_{zp}}{\partial t} \quad (3)$$

上述固结方程考虑了土体水平向位移, 其中固结系数和任意深度处平均超静孔压为

$$\left. \begin{aligned} C_x &= \frac{k_{xp}}{2(1-\nu)m_v \gamma_w}, \quad C_z = \frac{k_{zp}}{2(1-\nu)m_v \gamma_w}; \\ \bar{u}_{zp} &= \frac{1}{B-b} \int_b^B u dx \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

砂井与地基土体交界面处的渗流连续方程:

$$\frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = -\frac{1}{b} \frac{k_{xp}}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b} \quad (5)$$

砂墙固结模型的边界条件:

$$\left. \begin{aligned} x &= B, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \\ x &= b, \quad u = u_w; \\ z &= 0, \quad u_w = 0; \\ z &= 0, \quad \bar{u}_{zp} = 0; \\ z &= H, \quad \frac{\partial u_w}{\partial z} = 0; \\ z &= H, \quad \frac{\partial \bar{u}_{zp}}{\partial z} = 0; \\ t &= 0, \quad \bar{u}_{zp} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

综合上述固结方程(3)、交界面处的渗流连续方程(5)、边界条件式(6)以及初始条件式便构成了砂墙地基固结模型的定解条件, 并且注意到, 各物理量所包含的变量:

$$u = u(x, z, t), \quad \bar{u}_{zp} = \bar{u}_{zp}(z, t), \quad u_w = u_w(z, t) \quad (7)$$

方程(3)两边对 x 积分一次, 积分域 $[b, x]$, 整理得:

$$u = \frac{1}{C_x} \left(\frac{\partial \bar{u}_{zp}}{\partial t} - C_z \frac{\partial^2 \bar{u}_{zp}}{\partial z^2} \right) \left(\frac{x^2}{2} - Bx - \frac{b^2}{2} + Bb \right) + u_w \quad (8)$$

将式(8)代入式(4), 并整理得:

$$\bar{u}_{zp} = -\frac{(B-b)^2}{3C_x} \left(\frac{\partial \bar{u}_{zp}}{\partial t} - C_z \frac{\partial^2 \bar{u}_{zp}}{\partial z^2} \right) + u_w \quad (9)$$

将式(3)代入式(5), 整理得:

$$\frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = \frac{B-b}{b} \frac{1}{C_x} \frac{k_{xp}}{k_w} \left(\frac{\partial \bar{u}_{zp}}{\partial t} - C_z \frac{\partial^2 \bar{u}_{zp}}{\partial z^2} \right) \quad (10)$$

可见式(9)和式(10)构成了一组以 $\bar{u}_{zp}$, u_w 为基本未知量的偏微分方程组。

联立式(9)和式(10), 整理得:

$$\frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = \frac{3}{(B-b)b} \frac{k_{xp}}{k_w} (u_w - \bar{u}_{zp}) \quad (11)$$

联立式(9)和式(11), 整理得:

$$\frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = \frac{B-b}{b} \frac{1}{C_x} \frac{k_{xp}}{k_w} \left(\frac{\partial \bar{u}_{zp}}{\partial t} - C_z \frac{\partial^2 \bar{u}_{zp}}{\partial z^2} \right) \quad (12)$$

对式(11)关于 z 微分两次, 得:

$$\frac{\partial^4 u_w}{\partial z^4} = \frac{3}{(B-b)b} \frac{k_{xp}}{k_w} \left(\frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_{zp}}{\partial z^2} \right) \quad (13)$$

对式(11)关于 t 微分一次, 得:

$$\frac{\partial^3 u_w}{\partial z^2 \partial t} = \frac{3}{(B-b)b} \frac{k_{xp}}{k_w} \left(\frac{\partial u_w}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_{zp}}{\partial t} \right) \quad (14)$$

在式 (12) ~ (14) 的基础上, 消去 $\bar{u}_{zp}$, 得到方程:

$$C_z \frac{\partial^4 u_w}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 u_w}{\partial z^2 \partial t} - \left[3 \frac{C_x}{(B-b)^2} + \frac{3C_z}{(B-b)b} \frac{k_{xp}}{k_w} \right] \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} + \frac{3}{(B-b)b} \frac{k_{xp}}{k_w} \frac{\partial u_w}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

分离变量, 令 $u_w(z, t) = Z_w(z)T(t)$, 整理式 (15), 得:

$$C_z Z_w'' - \left[\frac{3C_x}{(B-b)^2} + \frac{3C_z k_{xp}}{(B-b)b k_w} \right] Z_w'' - \frac{T'}{T} = \beta \quad (16)$$

由式 (16), 可以得到式 (17) 和式 (18):

$$C_z Z_w'' - \left[\frac{3C_x}{(B-b)^2} + \frac{3C_z k_{xp}}{(B-b)b k_w} - \beta \right] Z_w'' - \frac{3k_{xp}}{(B-b)b k_w} \beta Z_w = 0 \quad (17)$$

$$T' + T\beta = 0 \quad (18)$$

解式 (17), $Z_w(z)$ 可以表示为

$$Z_w(z) = a \sin(\lambda z) + b \cos(\lambda z) + c \sinh(\xi z) + d \cosh(\xi z) \quad (19)$$

由式 (18), 得:

$$T = A e^{-\beta t} \quad (20)$$

综合式 (24)、式 (25), 得:

$$u_w = A_w [a \sin(\lambda z) + b \cos(\lambda z) + c \sinh(\xi z) + d \cosh(\xi z)] e^{-\beta t} \quad (21)$$

将式 (6) 第三、五式代入 (11), 得到关于 u_w 的另外两个边界条件:

$$\left. \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 u_w}{\partial z^3} \right|_{z=H} = 0 \quad (22)$$

综合三个式子四个边界条件, 得:

$$b = c = d = 0, \quad \lambda_{mp} = \frac{M}{H} \quad (23)$$

$$(M = \frac{2m+1}{2} \pi \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

综合上述结果, Z_w , u_w 可以写成如下形式:

$$Z_w = a_m \sin\left(\frac{M}{H} z\right) \quad (24)$$

$$u_w = \sum_{m=0}^{\infty} A_{mw} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\beta_{mp} t} \quad (25)$$

其中参数 a 已经包含在了任意参数 A_{mw} 。

将式 (25) 代入式 (11), 整理得:

$$\bar{u}_{zp} = \sum_{m=0}^{\infty} A_{mw} \left[1 + \frac{M^2 (B-b) b k_w}{3 H^2 k_{xp}} \right] \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\beta_{mp} t} \quad (26)$$

$$\text{即 } \bar{u}_{zp} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\beta_{mp} t} \quad (27)$$

$$\text{其中 } A_m = A_{mw} \left[1 + \frac{M^2 (B-b) b k_w}{3 H^2 k_{xp}} \right].$$

将式 (24) 代入式 (16), 整理得:

$$\beta_{mp} = \beta_{xmp} + \beta_{zmp} = C_x \frac{3 M^2 b k_w}{M^2 (B-b)^2 b k_w + 3 H^2 (B-b) k_{xp}} + C_z \left(\frac{M}{H} \right)^2 \quad (28)$$

由初始条件式 (6) 中第六式, 得到

$$A_m = \frac{2}{M} u_0 \quad (29)$$

$$A_{mw} = \frac{2 u_0}{M} \frac{3 H^2 k_{xp}}{3 H^2 k_{xp} + M^2 (B-b) b k_w} \quad (30)$$

综合上述解析过程, 式 (25) 和式 (26) 为砂墙地基固结解析解, 参数 A_m, A_{mw} 参见式 (29) 和式 (30)。

3 等效变换公式

轴对称砂井地基固结解析解采用 Tang Xiao-wu 均质砂井地基固结解析解。该解考虑了井阻、涂抹效应以及径竖向组合渗流。这里只给出最终解, 详细推导过程参见文献[6]。下标 a 表示轴对称情况。

$$\bar{u}_{za}(z, t) = u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\beta_{ma} t} \quad (31)$$

$$u_{wa}(z, t) = u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m}{F + D_m} \frac{2}{M} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\beta_{ma} t} \quad (32)$$

式中, D_m 反映井阻效应; F 则反映了涂抹效应。其表达式参见文献[6]。

为了使两种地基在任一时刻任意深度处的平均超静孔压相等, 即 $\bar{u}_{zp} = \bar{u}_{za}$, 只需保证

$$\beta_{mp} = \beta_{ma} \quad (33)$$

将竖向渗流和水平渗流分开考虑, 有:

$$C_z \left(\frac{M}{H} \right)^2 = \frac{k_v}{m_v \gamma_w} \frac{M^2}{H^2} \quad (34)$$

$$C_x \frac{3M^2 b k_w}{M^2 (B-b)^2 b k_w + 3H^2 (B-b) k_{xp}} = \frac{k_h}{m_v \gamma_w} \frac{2}{r_e^2} \frac{1}{F + D_m} \quad (35)$$

整理式 (33) 和式 (35), 得

$$k_{zp} = D_z k_v; k_{xp} = D_x k_h; D_z = 2(1-\nu) \quad (36)$$

$$D_x = \frac{4(1-\nu)n^2 d_w^2 (B-b)^2 b \frac{k_w}{k_h}}{3br_e^2 F n^2 d_w^2 \frac{k_w}{k_h} + \delta} \quad (37)$$

$$\delta = \frac{24br_e^2 H^2 (n^2 - 1)}{M^2} - \frac{12H^2 n^2 d_w^2 (1-\nu)(B-b)}{M^2} \quad (38)$$

式中 D_z 、 D_x 分别为竖向和水平向渗透系数调整系数。因 D_x 项中包含 M 项, 处理起来不方便。为此, 令 $\delta = 0$, 整理得:

$$n_p = \frac{B}{b} = \frac{n^2 - 1}{2(1-\nu)} + 1 \quad (39)$$

$$D_x = \frac{4(1-\nu)(B-b)^2}{3r_e^2 F} \quad (40)$$

最终, 砂井单元向砂墙单元变换的等效公式, 如式 (36)、(39) 和 (40)。整个等效过程阐述如下:

(1) 等效后的砂墙厚度 $2b$ 可保持原砂井直径 $2r_e$ 不变;

(2) 根据式 (44) 给出砂墙单元井径比 n_p , 结合砂墙厚度 $2b$, 进而确定了有限元计算范围内的砂墙布置;

(3) 在砂墙地基固结有限元程序中, 根据公式 (36) 和 (40) 调整砂墙地基的竖向以及水平向渗透系数。

4 算例验证

PDSS^[5]法是基于平面应变—空间渗流理论建立起来的一种砂井固结计算分析方法。PDSS 分析

方法认为, 砂井预压法中 (如堤坝、路基、机场跑道等砂井预压工程), 荷载可视为长条荷载。因此, 砂井地基的变形是平面二维的, 荷载长度方向位移为 0, 只在荷载宽度方向和地基竖向上发生位移; 砂井地基渗流场是轴对称空间的。PDSS 方法采用严密的 Biot 固结理论计算分析砂井地基固结问题, 它抛弃了平面砂墙简化时所做的某些人为假定, 比起砂墙等效简化算法更能真实地反映整个砂井地基的固结性状。鉴于此, 本文采用 PDSS 程序进行平面应变模型与 PDSS 模型的数值验证。

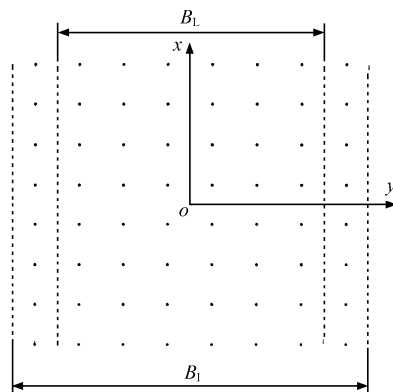


图 2 砂井地基平面布置示意图

Fig.2 The arrangement plan of sand-drained ground

某地基采用砂井预压法处理, 砂井间距 $s=1.5$ m, 正方形布置, 如图 2 所示。软土层厚度 15 m, 排水条件为 PTIB。土体渗透系数 $k_h = k_v = 1.0 \times 10^{-7}$ cm/s, 变形模量 $E = 2.5$ MPa, 泊松比 $\mu = 0.35$ 。砂井打穿软土层, 其等效直径 $d=0.067$ m, 渗透系数 $k_w = 3.0 \times 10^{-3}$ cm/s, 处理区 $B_L=60$ m, 荷载区 $B_L=57$ m, 最大荷载 $P_0=100$ kPa, 加载时间 $t_0=150$ d, 简化为单级加载。

4.1 PDSS 砂井固结模型建立

砂井等效影响区直径 $d_e=1.692$ m, 砂井转换成有限元计算中后边长为 6 cm。有限元网格划分如图 3 所示, 在计算宽度范围内的砂井单元数为 20; 两个砂井单元之间间隔 2 个土单元; 非砂井区, 分得 9 个单元。

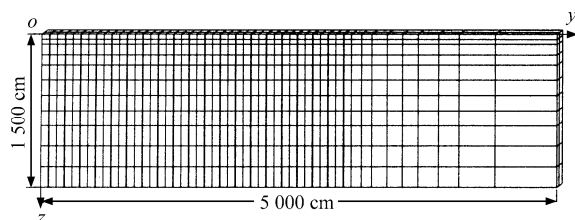


图 3 砂井地基有限元网格划分

Fig.3 The FEM grids of sand-drained ground

4.2 平面应变砂墙地基固结模型建立

等效变换过程中, 砂墙厚度不变, 仍然取砂井直径 $d_e = 6 \text{ cm}$, 按照 (36)、(39) 和 (40) 确定砂井单元向砂墙单元等效变换公式:

表 1 等效变换公式

Table 1 Equivalent transpositional formula

n_p	D_z	D_x	$k_{zp} / \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$	$k_{xp} / \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$
493	1.3	106	1.3×10^{-7}	1.06×10^{-5}

砂墙地基固结有限元网格划分如图 4 所示, 与 PDSS 模型同样计算宽度范围内, 砂墙厚度 6 cm , 影响直径 2958 cm , 砂墙单元数仅为 1 个。非砂井区划分 11 个单元。

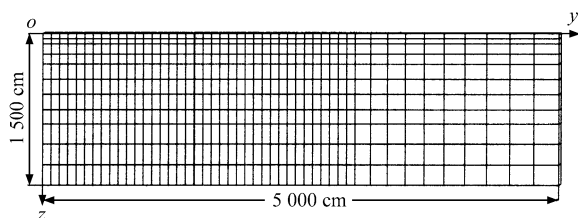


图 4 砂墙地基有限元网格划分

Fig.4 The FEM grids of sand-walled ground

4.3 沉降沿宽度方向变化

图 5、图 6 为 PDSS 模型和平面应变模型在不同时刻的地表沉降沿荷载宽度方向的变化曲线。砂墙平面应变等效模型与砂井 PDSS 模型的差异非常小, 尤其是在砂井处理区;

前期拟合效果非常好, 后期平面应变模型较 PDSS 模型为大; 沉降在宽度方向上的变化规律是相同的。

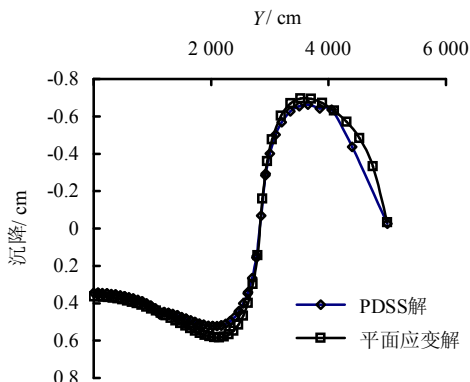


图 5 $t=7.5 \text{ d}$ 地表沉降在宽度方向上的变化

Fig.5 The curve of settlements along the direction of Loading

4.4 侧向位移沿深度方向变化

图 7 和图 8 为 PDSS 模型和平面应变模型在 $y=3350 \text{ cm}$ 处侧向位移沿深度变化曲线。

固结前期两种模型下算得的侧向位移值拟合

得非常接近; 后期表现为平面应变模型下的位移值总体小于 PDSS 模型; 两种模型所揭示的变化规律是一致的。

总体而言, 两种模型的沉降与侧向位移在固结前期的拟合程度较好; 后期则表现为沉降值以平面应变模型为大, 侧向位移值以 PDSS 模型为大; 无论是沉降变化还是侧向位移变化, 两种模型反映的规律是一致的。

综上所述, 本文所给出的砂墙平面等效转换公式是有效而可靠的。

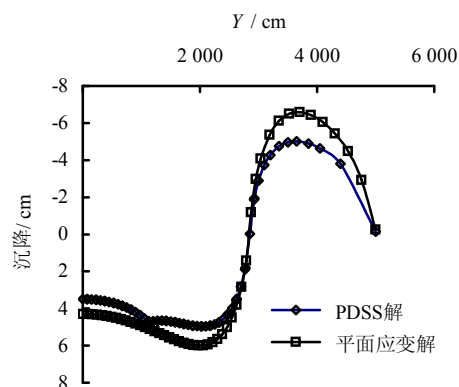


图 6 $t=150 \text{ d}$ 地表沉降在宽度方向上的变化

Fig.6 The curve of settlements along the direction of loading

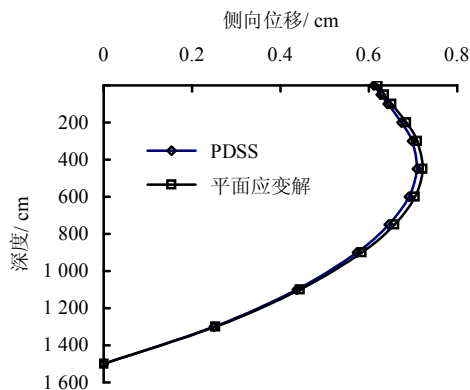


图 7 $t=7.5 \text{ d}$ 侧向位移沿深度方向上的变化

Fig.7 The lateral displacements along the depth

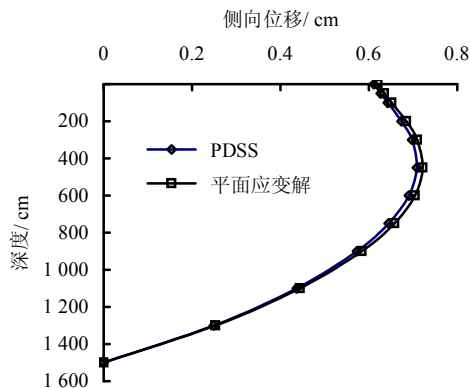


图 8 $t=150 \text{ d}$ 侧向位移沿深度方向变化曲线

Fig.8 The lateral displacements along the depth

5 结 语

本文明确了砂井地基向砂墙地基等效转换所要遵循的合理方法是：等效前的砂井地基固结理论必须考虑到井阻，涂抹以及径竖向组合渗流等各种因素，而作为等效后的砂墙地基，可以假定砂墙不存在涂抹区；

本文近而给出了砂井地基向砂墙地基等效转换的公式，使用本文所提出的等效转换方法，简化了有限元网格划分，降低了计算规模。以本文所提供的算例表明，在给定计算宽度下，等效后的砂墙单元数大大减少（等效前砂井单元数为 20，等效后的砂墙单元数为 1）。

本文所建构的平面应变砂墙地基有限元模型与实际的 PDSS 模型的数值对比表明：两种模型所揭示的沉降以及侧向位移变化规律是一致的，其中沉降变化曲线拟合效果较好。从而验证了本文所提出

的等效公式的有效性和可靠性。

参 考 文 献

- [1] Hird C.C., Pyrah I.C. and Russell D., Finite element modeling of vertical drains beneath embankments on soft ground[J]. **Geotechnique**, 42(3): 499—511.
- [2] Indraratna, B. and Redana, I. W., Plain strain modeling of smear effects associated with vertical drains[J]. **Geotech. Engrg., ASCE**, 1995, 123(5): 474—478.
- [3] 赵维炳, 陈永辉, 龚友平. 平面应变有限元分析中砂井的处理方法[J]. 水利学报, 1998, (6): 53—57.
- [4] 陈小丹, 赵维炳. 考虑井阻和涂抹的砂井地基平面应变等效方法分析[J]. 岩土力学, 2005, (4): 567—571.
- [5] 谢康和. 砂井地基: 固结理论, 数值分析与优化设计. 博士学位论文[D]. 杭州, 浙江大学, 1987.
- [6] Tang Xiao-wu. A study for consolidation of ground with vertical drain system[D]. Saga Univer, [s.h.], 1998.